

381654729

西山豊

表題の数を見て、あの問題だと気付いた人は、このパズルを一度は解いた経験があるのだろう。これはパズルの答えであるが、この数の特性を説明しておこう。381654729は9桁の数で、1から9までの数字が重複することなく並んでいる。前から2桁取った数は38であり、これは桁数の2で割り切れる。同様に前から3桁取った数は381であり、これは桁数の3で割り切れる。このような割り算が1桁から9桁のすべてについて成り立っている。読者は確かめてみることに。

$$38 \div 2 = 19$$

$$381 \div 3 = 127$$

$$3816 \div 4 = 954$$

.....

1から9までの数字を並べ変えてできる数は、順列より $9! = 362880$ 通りの数があるが、その中で上記の割り算の条件をすべて満たす数は、381654729だけだというのだ。パズルは解く楽しみがある。答えを知ってしまうと解く気になれないかもしれないが、これが唯一の解であることを確かめるのもいいだろう。 $9! = 362880$ 通りの数すべてを調べるのも大変だと思われるかもしれないが、条件を絞っていけばパソコンの力を借りずとも筆算で解け、中学や高校の数学好きの生徒には格好の問題ともなる。

一般的な解法はつぎのように考えられる。9桁の数字が9で割り切れるかどうかは検査しなくてよいことがわかる。なぜなら、1から9までの数字を重複することなく並べた数であるので、

$$\begin{aligned} 3 + 8 + 1 + 6 + 5 + 4 + 7 + 2 + 9 \\ = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \end{aligned}$$

となり、45が9で割り切れることから、すべての数が9で割り切れることになる。

前から5桁取った数が5で割り切れる条件は、下の桁が5か0であるから、自ずと5桁目が5であることが決まる。 $(xxxx5xxxx)$ 。残りの8個の数字をどのように並べるかであるが、前から2桁、4桁、6桁、8桁の数が、2, 4, 6, 8で割り切れるということは、2桁目、4桁目、6桁目、8桁目が偶数であることが必要条件である。偶数は{2, 4, 6, 8}の4つのうちのどれかである。残る1桁目、3桁目、7桁目、9桁目は奇数となる。奇数は5を除く{1, 3, 7, 9}の4つのうちのどれかである。したがって、順列の計算により $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ 通りの数について調べればよいことになる。

7桁の数が7で割り切れるかどうかのチェックは次のように考えるとよい。下の桁から3桁ずつ区切り、奇数グループの合計と偶数グループの合計の差を求め、その値が7で割れるかどうかを調べればよい。たとえば3816547は

$$816 - (3 + 547) = 266$$

となり、266は7で割り切れるから、3816547は7で割り切れる。これは3や9の場合と同様、剰余の考えに基づいている。7桁の数を $abcdefg$ とすると、 $1000d = (7 \times 143 - 1)d$ であるから、剰余だけに注目すると $1000d$ は $-d$ になる。

このパズルはマーチン・ガードナー (1914-2010) が、かつて雑誌『サイエンティフィック・アメリカン』の連載記事「数学ゲーム」のひとつとして出題したものである。誤りやすい解として147258369や783654921があるが、これらは8桁の数が8で割り切れない。このパズルにはおまけがついている。0も数字とみなすと、3816547290は、10桁も10で割り切れることになる。

(にしやまゆたか／大阪経済大学)